Stochastische Formeln

Ac 2013-2021

1. Permutationen

Die **Fakultät** n! (sprich: n Fakultät) ist so definiert:

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \quad , \quad \text{wobei} \quad 0! = 1}$$

Die Fakultät gibt die Anzahl der möglichen Permutationen (Vertauschungen) von n Elementen an.

Beispiel: Die 3 Buchstaben a b c können auf 3! = 6 verschiedene Arten angeordnet werden, nämlich
abc acb bac bca cab cba

Rechenbeispiele:

10 ! = 3628800
25 ! = 15511210043330985984000000

69 ! = 171122452428141311372468338881272839092270544893520369393648040923257279754140647424000000000000000 $\approx 1{,}7112245242 \cdot 10^{98}$; dies kann ein TR gerade noch ausrechnen !

200 ! = 788657867364790503552363213932185062295135977687173263294742533244359449963403342920304284011984623904177212138919638830257642790242637105061926624952829931113462857270763317237396988943922445621451664240254033291864131227428294853277524242407573903240321257405579568660226031904170324062351700858796178922222789623703897374720000000000000000000000000000000000000000000000000 $\approx 7{,}8865786736 \cdot 10^{374}$

2. Kombinationen ohne Wiederholung

Der **Binomialkoeffizient** „n über k" ist für $n \geq k$ so definiert:

$$\boxed{nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-2)) \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}}$$

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Elemente aus insgesamt n zu ziehen; **ohne** Zurücklegen, **ungeordnet**, d.h. Reihenfolge ist unwichtig.

Beispiel: Lotto 6 aus 49 ;
es gibt 49 über 6 = 13 983 816 verschiedene Möglichkeiten für die 6 gezogenen Kugeln.

Rechenbeispiele:

nCk(10;5) = 252
nCk(36;7) = 8347680
nCk(100;50) = 100891344545564193334812497256
nCk(200;100) = 90548514656103281165404177077484163874504589675413336841320 $\approx$ $9{,}0548514656 \cdot 10^{58}$
nCk(336;168) = 6088717586293958420919965582862840857932876070583068946752913884253601825766708971967140661846856600 $\approx 6{,}0887175862 \cdot 10^{99}$; kann ein TR gerade noch ausrechnen !

3. Kombinationen mit Wiederholung

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$ Kombinationen n, k

Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus insgesamt n zu ziehen;
mit Zurücklegen, **ungeordnet**, d.h. Reihenfolge ist unwichtig.

Beispiel: Aus 6 Würfeln sollen 2 ausgewählt werden;
dafür gibt es 6+2-1 über 2 = 21 verschiedene Möglichkeiten.

4. Variationen ohne Wiederholung

$$\text{nPk} = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\,\dots\,\cdot(n-(k-1))\ ;\ k \le n; k,n \in \mathbb{N}$$

Variationen n, k ohne Wiederholung

Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus insgesamt n zu ziehen;
ohne Zurücklegen, **geordnet**, d.h. Reihenfolge ist wichtig.

Beispiel: berücksichtigt man bei 6 aus 49 auch die Reihenfolge,
so gibt es 49 nPk 6 = 10 068 347 520 verschiedene Möglichkeiten.

5. Variationen mit Wiederholung

$$\text{n}^{\text{k}} = n\cdot n\cdot n\cdot\,\dots\,\cdot n\ \ (k-mal)\ ;\ n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$$ Variationen n, k mit Wiederholung

Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus insgesamt n zu ziehen;
mit Zurücklegen, **geordnet**, d.h. Reihenfolge ist wichtig.

Beispiel: Mit 8 Bits = 1 Byte hat man 2 Elemente (0 bzw. 1), die aus je 8 ausgewählt werden;
dafür gibt es 2^8 = 256 Möglichkeiten.

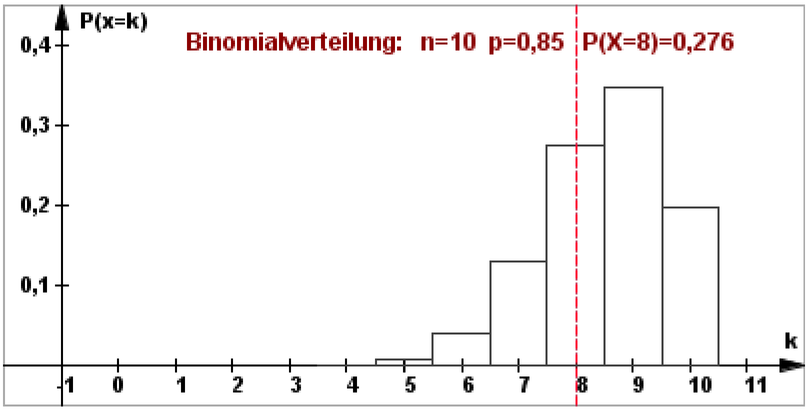
6. Diskrete Verteilungen

$$B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\quad;\ k\le n;\ k,n\in\mathbb{N};\ p\in[0;1]$$ Binomialverteilung

Erwartungswert $\mu = n\cdot p$ Standardabweichung $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

B(n;p;k) gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einem n-stufigen Zufallsversuch mit 2 Ausgängen (Erfolgswahrsch. p und Misserfolgswahrsch. 1-p) auf jeder Stufe k Erfolge zu erzielen.

Beispiel: Beim Biathlon hat ein Athlet eine Trefferwahrscheinlichkeit von 85%;
bei 10 Schüssen ist dann die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer B(10; 0,85, k)
Für genau 10 Treffer: B(10; 0,85, 10) = 0,197 = 19,7%
Für mindestens 8 Treffer: $P(X \ge 8)$ = B(10; 0,85, **8**) + B(10; 0,85, **9**) + B(10; 0,85, **10**) = 0,92 = 92%

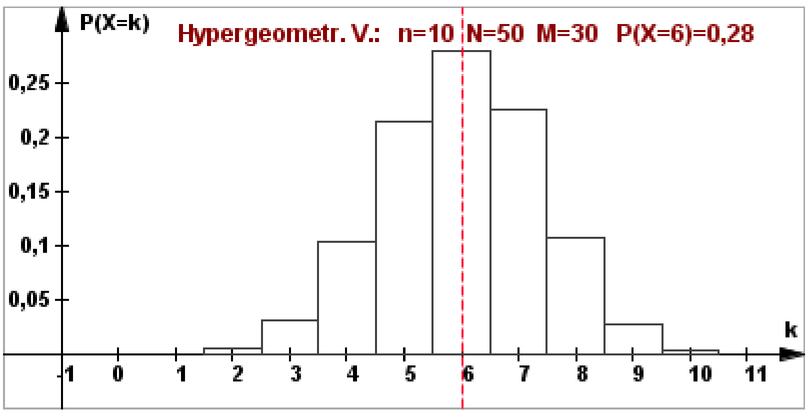


$$P_{HypGeo}(N;M;n;k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad;\ 0\le k\le n;\ k\le M;\ n-k\le N-M$$ Hypergeom. Verteilung

Erwartungswert $\mu=n\cdot\frac{M}{N}$ Standardabweichung $\sigma=\sqrt{n\cdot\frac{M}{N}\cdot(1-\frac{M}{N})\cdot\frac{N-n}{N-1}}$

P_{HypGeo}(N;M;n;k) gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einem n-stufigen Zufallsversuch mit N Elementen mit 2 Ausprägungen M und N-M , k-mal M zu ziehen (ohne Zurücklegen) .

Beispiel: In einem Topf liegen 30 rote und 20 schwarze Kugeln; 10 Kugeln werden mit einem Griff gezogen; wie hoch ist die Wahrsch. , dass höchstens 6 rote dabei sind ?
Lösung: M = 30 N = 50 n = 10 k = 6; $P(X \le 6) = 0{,}635$

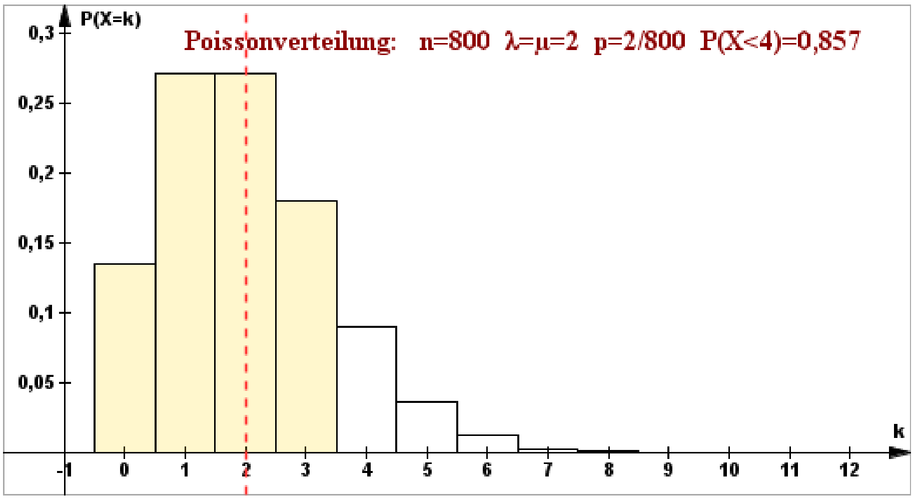


$$P_{\text{Poiss}}(\lambda;k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad ; k \in \mathbb{N} \; ; \; \lambda > 0$$ Poisson-Verteilung

Erwartungswert $\mu = \lambda = n \cdot p$; $(n \geq 120;\ p \leq 0,08)$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Die Poisson-Verteilung $P_{Poiss}(\lambda;k)$ ist eine Näherungsformel für die Binomialverteilung bei großem n und kleinem p ($n \geq 120$ $p \leq 0,08$), also bei sehr seltenen Ereignissen .

Beispiel: Bei 800 Menschen treten im Schnitt 2 ärztliche Notfälle auf.
Wie groß ist die W. von höchstens 3 Notfällen ?
Lösung: n = 800 p = 2/800, also $\mu = \lambda = 800 \cdot 2/800 = 2$;
$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,857$

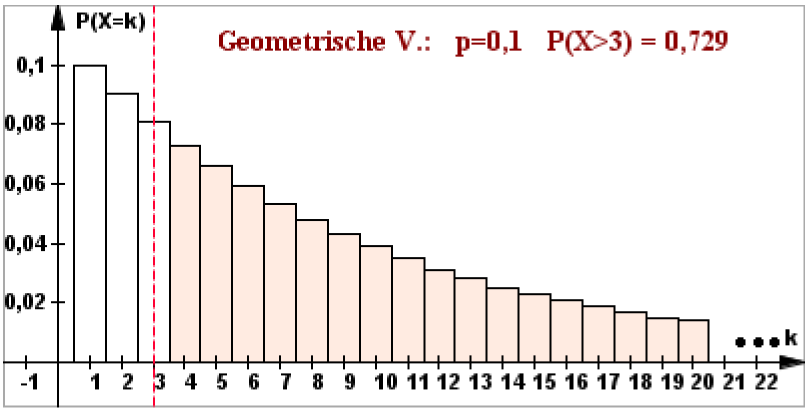


$$P_{geo}(p;k) = p \cdot (1-p)^{k-1} \quad ; p \in [0;1] \; ; k \in \mathbb{N}^*$$ Geometrische Verteilung

Erwartungswert $\mu = \frac{1}{p}$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Die Geometrische Verteilung $P_{geo}(p;k)$ gibt die Wahrsch. für einen Erfolg bei Vorgängen an, die mit der Zeit t immer unwahrscheinlicher werden .

Beispiel: In einem Jahr versagen 1/10 der Bauteile einer Bauserie.
Wie viel % der Bauteile halten länger als 3 Jahre ?
Lösung: p = 0,1 und somit $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,271 = 0,729 = 72,9\ \%$



7. Stetige Verteilungen

Hier werden sogenannte **Dichtefunktionen** (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) angegeben.

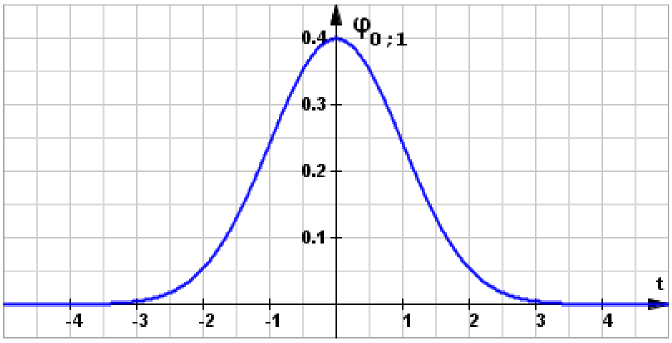
$$\varphi_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \; t,\mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma \in \mathbb{R}_+^*$$

Dichte der Normalverteilung

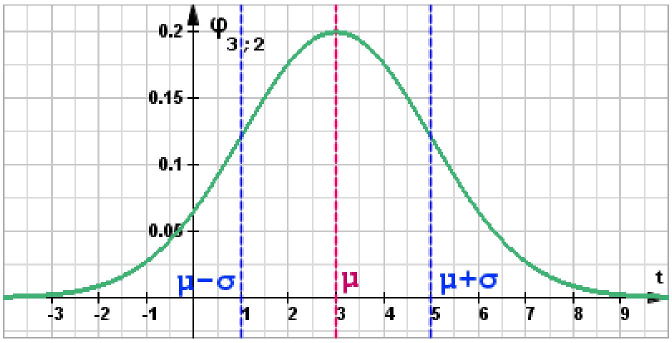
für $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$ ergibt sich die sog. Standard-Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine **Näherungsformel** für die Binomialverteilung für sehr große n .

Dichte der Standard-Normalverteilung



Dichte der Normalverteilung $\varphi_{3;2}$

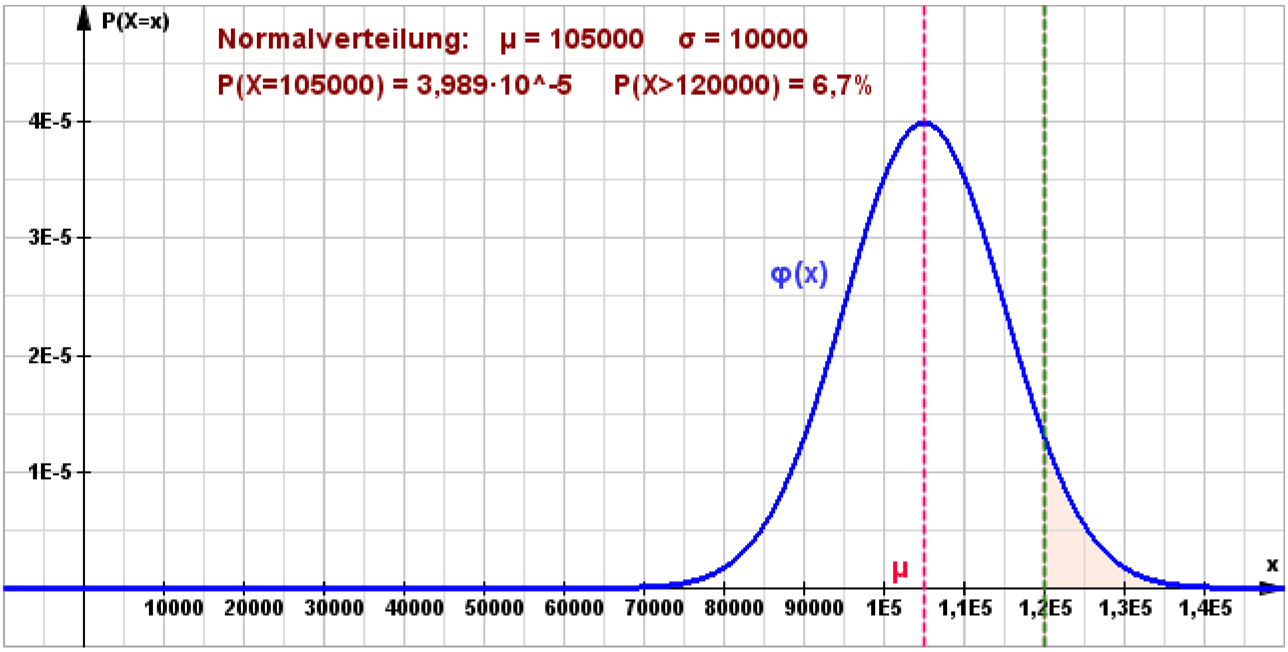


Die **Wahrscheinlichkeit** der Normalverteilung wird über Flächeninhalte zwischen Graph und t-Achse bestimmt (entweder per Integration oder mithilfe vorhandener Tabellen):

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Normalverteilung (es gibt hierfür keine Stammfunktion !)

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt \quad ; \; x,t,\mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma \in \mathbb{R}_+^*$$

für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ergibt sich die sog. Gaußsche Integralfunktion



Beispiel (zur obigen Grafik) :

Die Lebensdauer X (in km) eines Automotors sei normalverteilt mit μ = 105000km und σ = 10000km.

a) Bei wie viel % der Motoren übersteigt die Lebensdauer 120000km ?
Lösung: $P(X > 120000) = 1 - P(X \leq 120000) = 1 - \Phi(120000, 105000, 10000) = 1 - 0{,}933 = 6{,}7\%$.

b) 15% der Motoren sind nach einer bestimmten Zeit defekt.
Wie viele km haben diese Motoren höchstens durchgehalten ?
Lösung: $P(X \leq x) = 15\%$. x = inverse N.(0.15, 105000, 10000) = 94635,7 . Also x = 94635 km !

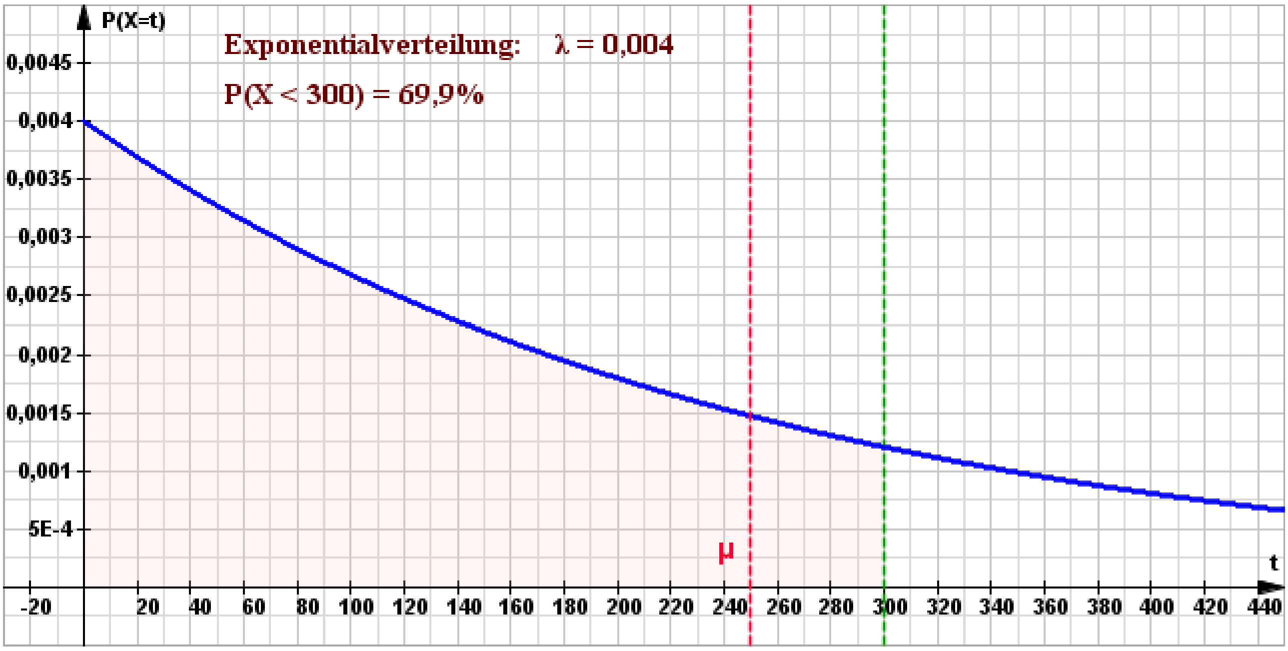
$$f_{Exp}(\lambda;t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \;;\; t \geq 0 \;;\; \lambda > 0$$ Dichte der Exponentialverteilung

Erwartungswert $\mu = \frac{1}{\lambda}$ Standardabweichung $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Exponentialverteilung:

$$F_{Exp}(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \;;\; x,t \geq 0$$

Die Exponentialverteilung sucht nach einem Erfolg bei Vorgängen, die mit der Zeit t immer unwahrscheinlicher werden (vergleiche Geom.V. !) .



Beispiel (zur obigen Grafik) :

Die Lebensdauer einer Glühlampe genügt der Gleichung f(t) = 0,004·e^(-0,004t) ; t in Stunden .
Wie viel % der Glühlampen brennen weniger als 300 Stunden ?

Lösung: P(t < 300) = Integral(f(t), t, 0, 300) = [-e^(-0,004t)] 0..300 = -e^(-0,004·300)+e^(-0,004·0) = 0,699 = 69,9%